Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
Enero–Marzo 2011

Nombre: ______________________________

Carné: ________________ Sección: ______

2do. Parcial de Matemáticas VII. Bloque A (7:30 AM)

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER; $a \in \mathbb{R},\ c > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
(La expresión $1_{(-c,c)}(x)$ indica la función que vale 1 para $-c < x < c$ y 0 en otro caso)

$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\omega-a)$
$f(cx)$	$\frac{1}{c}\hat{f}(\frac{\omega}{c})$
$f^{(n)}_{\text{gen}}(x)$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
$x^n f(x)$	$i^n \hat{f}^{(n)}_{\text{gen}}(\omega)$
e^{-cx^2}	$\frac{1}{\sqrt{4\pi c}}e^{-\omega^2/4c}$

$\frac{1}{c^2+x^2}$	$\frac{1}{2c}e^{-c\lvert\omega\rvert}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$\frac{c}{\pi(c^2+\omega^2)}$
$\frac{\operatorname{sen} cx}{x}$	$\frac{1}{2}1_{(-c,c)}(\omega)$
$1_{(-c,c)}(x)$	$\frac{\operatorname{sen} c\omega}{\pi\omega}$
1	$\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$\frac{1}{2\pi}$
$f(x)g(x)$	$\hat{f} * \hat{g}(\omega)$

$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\,x$
$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\,\omega$
$\mathcal{F}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$
$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$

---

1. (12 ptos.) Considere la función $f(x) = |x|$ en $-\pi \le x \le \pi$.
   (a) Obtenga la serie de Fourier trigonométrica de f.
   (b) Calcule el valor al cual converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.
   (c) Calcule el valor al cual converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

2. (8 ptos.) Calcule la integral $I = -\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^3-2x^2+2x}\,\mathrm{d}\,x$.

   Sugerencia: Note que $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$.

3. (15 ptos.) Resuelva la ecuación de calor

$$U_t = kU_{xx}, \qquad U = U(x,t),\ 0 \le x < \pi,\ t > 0$$

   que satisface las condiciones

$$U(0,t) = U(\pi,t) = 0,\ t > 0$$
$$U(x,0) = 1 \text{ en } 0 < x < \pi.$$

4. (15 ptos.) Encuentre la función acotada $U(x,y)$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x > 0, y > 0\}$ tal que $\Delta U = 0$ en $\mathcal{R}$ con $\begin{cases} U(0,y) = 0 & , \quad y > 0 \\ U(x,0) = 1 & , \quad x > 0. \end{cases}$